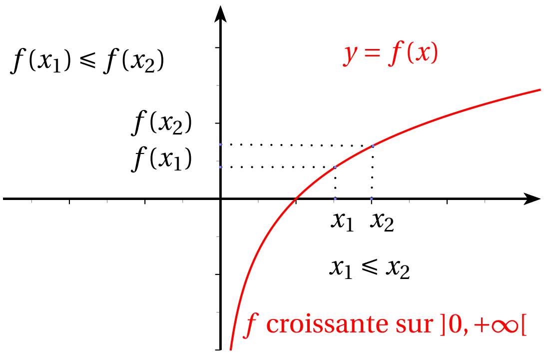
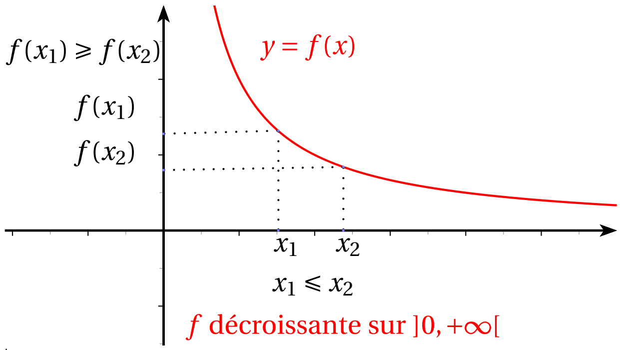
# 1 Généralités

## 1.1 Variations

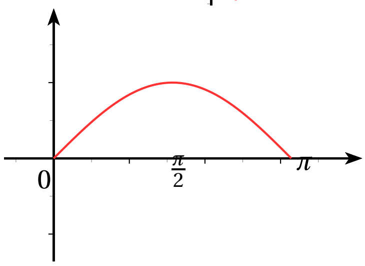
**Définition 1.** *Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $I$.*

- *On dit que $f$ est* ***croissante*** *(resp. strictement croissante) sur $I$ si :*
  *Pour tous $x_1$ et $x_2$ dans $I$ tels que $x_1 \leqslant x_2$ on a $f(x_1) \leqslant f(x_2)$ (reps. $f(x_1) < f(x_2)$).*
- *$f$ est* ***décroissante*** *(resp. strictement décroissante) sur $I$ si :*
  *Pour tous $x_1$ et $x_2$ dans $I$ tels que $x_1 \leqslant x_2$ on a $f(x_1) \geqslant f(x_2)$ (reps. $f(x_1) > f(x_2)$).*
- *On dit que $f$ est* ***constante*** *sur $I$ si :*
  *Pour tous $x_1$ et $x_2$ dans $I$, $f(x_1) = f(x_2)$*
- *On dit que $f$ est* ***monotone*** *sur $I$ si elle est croissante sur $I$ ou décroissante sur $I$.*




**Exemple :**
$f$ est monotone sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et monotone sur $[\frac{\pi}{2}, \pi]$
mais n'est pas monotone sur $[0, \pi]$



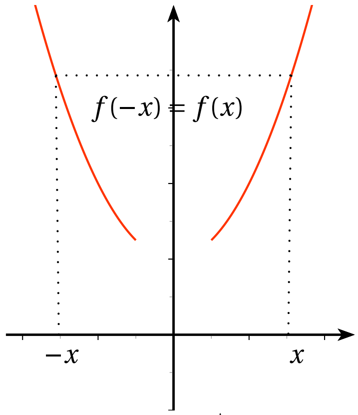

## 1.2 Fonction paire-Fonction impaire

Soit $f$ une fonction et $\mathscr{D}_f$ son ensemble de définition.

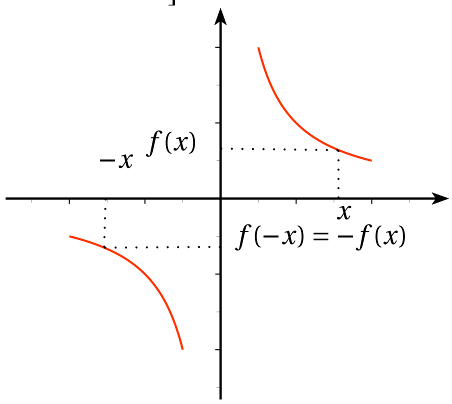
**Définition 2.** • *$f$ est paire signifie que pour tout $x \in \mathscr{D}_f$,* $\begin{cases} -x \in \mathscr{D}_f \\ \text{et} \\ f(-x) = f(x) \end{cases}$

• *$f$ est impaire signifie que pour tout $x \in \mathscr{D}_f$,* $\begin{cases} -x \in \mathscr{D}_f \\ \text{et} \\ f(-x) = -f(x) \end{cases}$

La fonction $f$ est paire si et seulement si sa courbe représentative $\mathscr{C}_f$ dans un repère orthogonal est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.



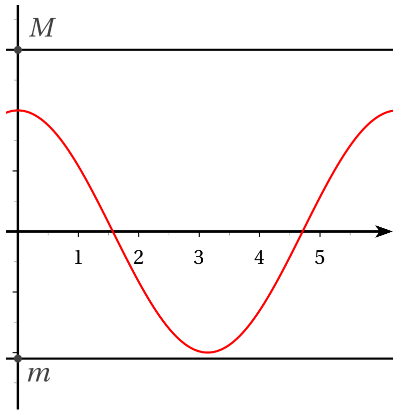

La fonction $f$ est impaire si et seulement si sa courbe représentative $\mathscr{C}_f$ est symétrique par rapport à l'origine du repère.




### 1.3 Majorant, Minorant

**Définition 3.** *Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $I$. On dit que :*

- *$f$ est **majorée** sur $I$ s'il existe un réel $M$ tel que*
  $\forall x \in I, \quad f(x) \leqslant M.$
- *$f$ est **minorée** sur $I$ s'il existe un réel $m$ tel que*
  $\forall x \in I, \quad m \leqslant f(x).$
- *$f$ est **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée sur $I$.*




**Exemples :**

1. $f : x \mapsto 2x^2 + 4x - 2$ s'écrit sous forme canonique $f(x) = 2(x+1)^2 - 4$
   $f(x) = 2(x+1)^2 - 4 \geqslant -4$ pour tout $x$ car $2(x+1)^2 \geqslant 0$ sur $\mathbb{R}$
   donc - 4 est un minorant de $f$ sur $\mathbb{R}$
   et c'est même le minimum de $f$ car il est atteint en $x = -1$.
2. $f : x \mapsto 5 - \dfrac{3}{(1+x)^2}$
   $f(x) \leqslant 5 \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ 5 est un majorant, 6 aussi.

# 2 Fonctions usuelles

## 2.1 Fonction affine

**Définition 4.** *$a$ et $b$ étant deux réels*
*$f : x \longmapsto ax + b$, est appelée fonction affine.*
*Sa courbe représentative est la droite d'équation $y = ax + b$.*

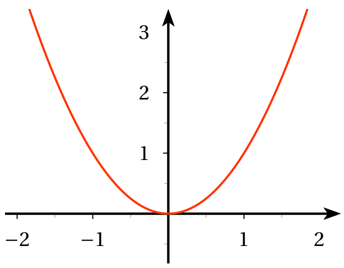
## 2.2 Fonction carré

### 2.2.1 Fonction $x \longmapsto x^2$

**Définition 5.** *La fonction carré est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2$.*
*Sa courbe représentative dans un repère orthogonal est appelée parabole d'équation $y = x^2$, de sommet le centre O du repère.*

**Propriétés 1.** *La fonction carré est strictement décroissante sur* $]-\infty, 0]$ *et strictement croissante sur* $[0, +\infty[$

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x^2$ | | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | |



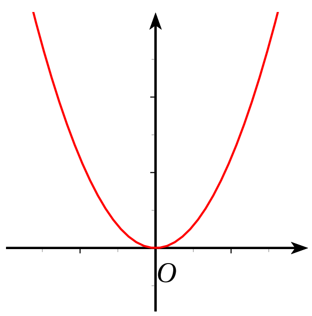

### 2.2.2 Fonction $x \longmapsto ax^2$, $\quad a \neq 0$

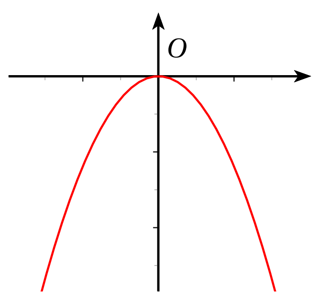
Si $a > 0$

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $ax^2$ | | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | |

Si $a < 0$

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $ax^2$ | | $\nearrow$ | $0$ | $\searrow$ | |



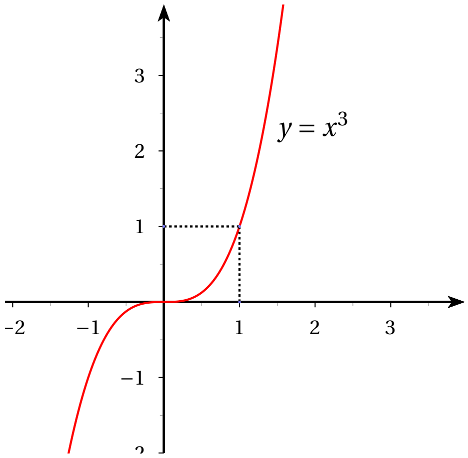

**Définition 6.** *La courbe représentative de la fonction $x \longmapsto ax^2$ dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est appelée parabole de sommet O.*
*Si $a > 0$ on dit que la parabole est tournée vers le haut.*
*Si $a < 0$ on dit que la parabole est tournée vers le bas.*

### 2.3 Fonction cube

**Définition 7.** *La fonction cube est définie sur* $\mathbb{R}$ *par :* $f(x) = x^3$ .

**Propriétés 2.** *La fonction cube est strictement croissante sur* $\mathbb{R}$ .

| $x$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $x^3$ | $\nearrow$ | |



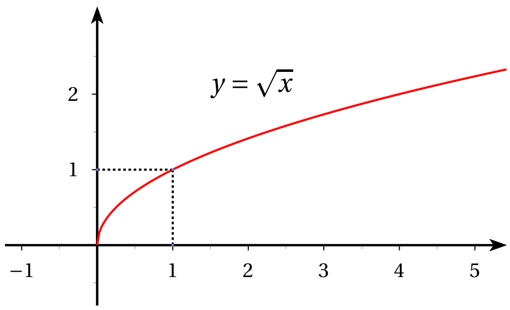

### 2.4 Fonction racine carrée

#### 2.4.1 La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$

**Définition 8.** *La fonction racine carrée est définie sur* $[0, +\infty[$ *par :* $f(x) = \sqrt{x}$ .

**Propriétés 3.** *La fonction racine carrée est strictement croissante sur* $[0, +\infty[$.

| $x$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $\sqrt{x}$ | $0$ $\nearrow$ | |




#### 2.4.2 La fonction $x \mapsto \sqrt{u(x)}$ où $u$ est une fonction positive

Soit $u$ une fonction définie sur $I$ et positive sur $I$.
Soit $v = \sqrt{u}$ la fonction définie sur $I$ par $v : x \mapsto \sqrt{u(x)}$.

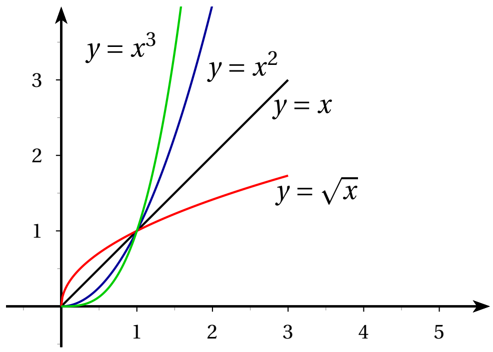
**Propriétés 4.** *Si u est croissante sur I alors* $\sqrt{u}$ *est croissante sur I*
*Si u est décroissante sur I alors* $\sqrt{u}$ *est décroissante sur I*

**Exemple :** Soit $u : x \mapsto x^2 - 1$ sur $\mathbb{R}$ . $u$ est décroissante sur $]-\infty; 0[$ et croissante sur $[0; +\infty[$. Pour définir $u$ nous devons nous limiter à $]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[$ car $u$ doit être positive.
Sur $]-\infty; -1]$ $u$ est décroissante donc $\sqrt{u}$ est décroissante sur $]-\infty; -1]$
Sur $[1; +\infty, 0]$ $u$ est croissante donc $\sqrt{u}$ est croissante sur $[1; +\infty, 0]$.

### 2.5 Comparaison de $x$, $\sqrt{x}$, $x^2$ et $x^3$ pour $x \in \mathbb{R}^+$

**Propriétés 5.** *pour $x \in \mathbb{R}^+$ on a :*

- *Si* $0 < x < 1$ $\quad x^3 < x^2 < x < \sqrt{x}$
- *Si* $x > 1$ $\quad \sqrt{x} < x < x^2 < x^3$

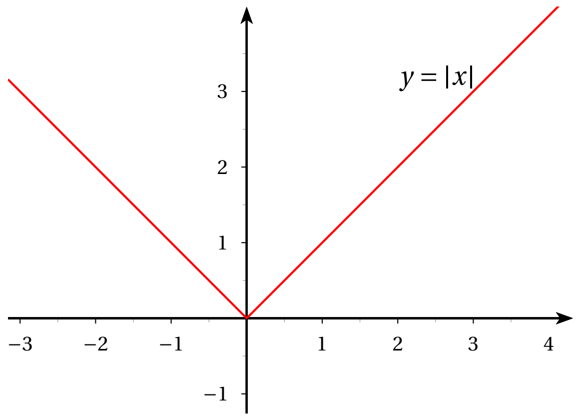



### 2.6 Fonction valeur absolue

**Définition 9.** *Soit x un nombre réel. On appelle valeur absolue de x, notée $|x|$ le nombre réel défini par :*

$$\begin{cases} |x| = x \text{ si } x \geqslant 0 \\ \text{et} \\ |x| = -x \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $\lvert x \rvert$ | ↘ | $0$ | ↗ |




### 2.7 Fonction inverse

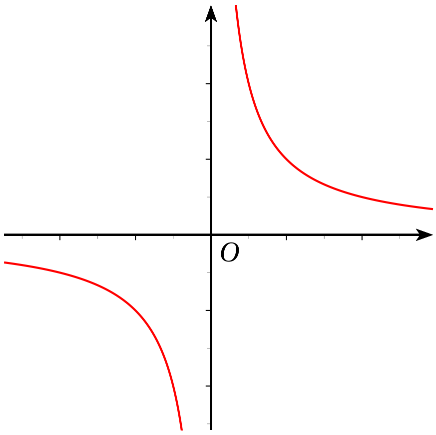
#### 2.7.1 Fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$

**Définition 10.** *La fonction inverse est définie sur $\mathbb{R} \backslash \{0\}$ par : $f(x) = \dfrac{1}{x}$.*
*Sa courbe représentative dans un repère orthogonal est appelée hyperbole. Elle admet l'origine O du repère comme centre de symétrie et comme asymptotes les droites d'équations $x = 0$ et $y = 0$.*

**Propriétés 6.** *La fonction inverse est strictement décroissante sur $]-\infty, 0[$ et strictement décroissante sur $]0, +\infty[$*

**ATTENTION :** La fonction inverse n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}^*$ car $-2 < 3$ mais $-\dfrac{1}{2} < \dfrac{1}{3}$.

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{1}{x}$ | | $\searrow$ | $\Vert$ | $\searrow$ | |



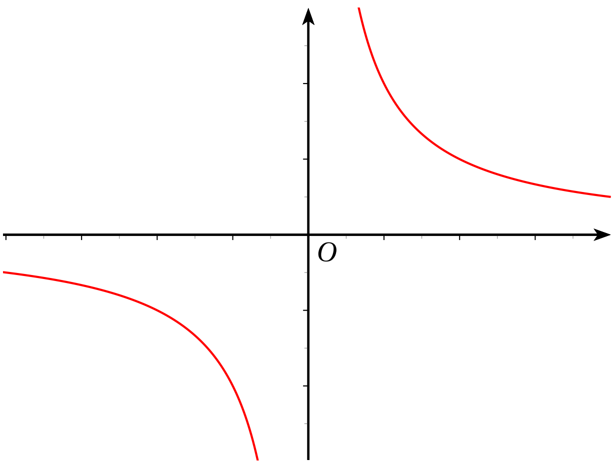

### 2.7.2 Fonction $x \mapsto \frac{a}{x}$

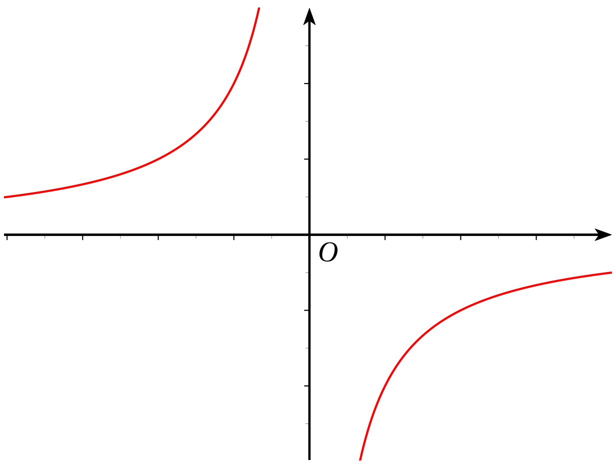
Si $a > 0$

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{a}{x}$ | | $\searrow$ | $\Vert$ | $\searrow$ | |

Si $a < 0$

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{a}{x}$ | | $\nearrow$ | $\Vert$ | $\nearrow$ | |




### 2.7.3 Fonction $x \mapsto \frac{1}{u(x)}$ où $u$ est une fonction qui garde un signe constant

**Propriétés 7.** *Soit $u$ une fonction qui ne s'annule pas et qui garde un signe constant sur un intervalle $I$. On pose $v = \frac{1}{u}$. Alors :*

- *Si $u$ est croissante sur $I$ alors $v$ est décroissante sur $I$*
- *Si $u$ est décroissante sur $I$ alors $v$ est croissante sur $I$*

*$u$ et $v$ ont donc des variations contraires sur $I$.*

**Exemple :** $v : x \mapsto \frac{1}{x^2+1}$ définie sur $\mathbb{R}$.

Sur $[0, +\infty[$ $u$ est croissante donc $v$ est décroissante sur $[0, +\infty[$.

Sur $]-\infty, 0]$ $u$ est décroissante donc $v$ est croissante sur $]-\infty, 0]$.

**Remarques :**

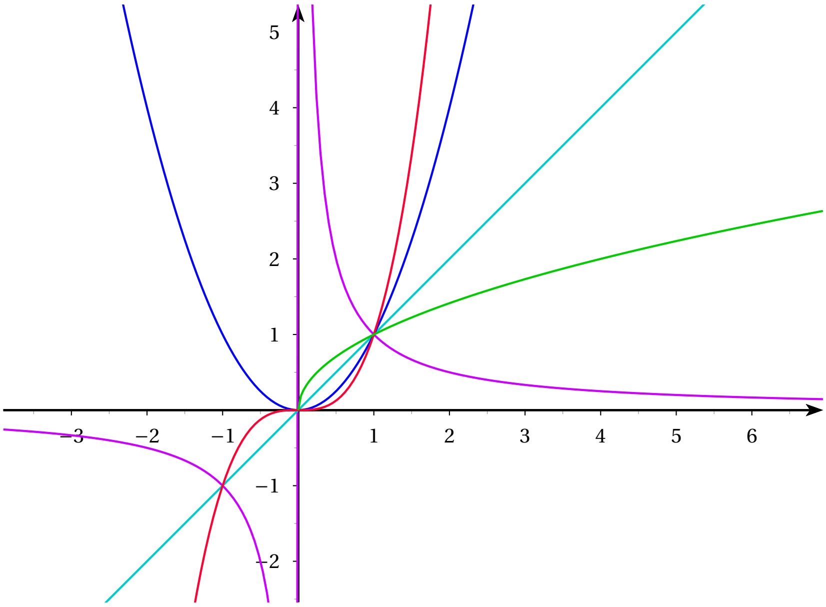
- Quand on ajoute un nombre à une fonction, ses variations ne changent pas.
- Quand on multiplie une fonction par un nombre positif, ses variations ne changent pas.
  Quand on multiplie une fonction par un nombre négatif, ses variations changent .

## 3 EXERCICES : Les exercices de base

1. Les fonctions suivantes sont-elles paire ? impaire ? ni l'une ni l'autre ?

   a. $f : x \mapsto -\dfrac{1}{x}$ b. $f : x \mapsto \dfrac{3x+1}{x+2}$ c. $f : x \mapsto (x+2)^2$

2. Dire quelle sont les fonctions représentées ci-dessous parmi $\dfrac{1}{x}$, $x$, $x^2$, $x^3$, $\sqrt{x}$.




3. (a) Écrire $f(x)$ sans valeur absolue, suivant les valeurs de $x$ :

   i. $f(x) = 2|x+1| - 1$ ii. $f(x) = |x^2 - 2| + 3x$ iii. $f(x) = \left|\dfrac{x+3}{x-1}\right|$

   (b) Représenter graphiquement :

   i. $f(x) = 2|x+1| - 1$ ii. $f(x) = |x^2 - 2| + 3x$ iii. $f(x) = \left|\dfrac{x+3}{x-1}\right|$

## 4 EXERCICES : Les exercices de base ( corrigés)

1. a. $f : x \mapsto -\dfrac{1}{x}$ et $\mathscr{D}_f = R \backslash \{0\}$

   $f(-x) = -\dfrac{1}{-x} = \dfrac{1}{x} = -f(x)$ donc la fonction est impaire sur $\mathscr{D}_f$

   b. $f : x \mapsto \dfrac{3x+1}{x+2}$ et $\mathscr{D}_f = R \backslash \{-2\}$

   or $f(-1) = -2$ et $f(1) = \dfrac{4}{3}$.

   $f(-1) \neq f(1)$

   $f(-1) \neq -f(1)$ donc la fonction est ni paire, ni impaire.

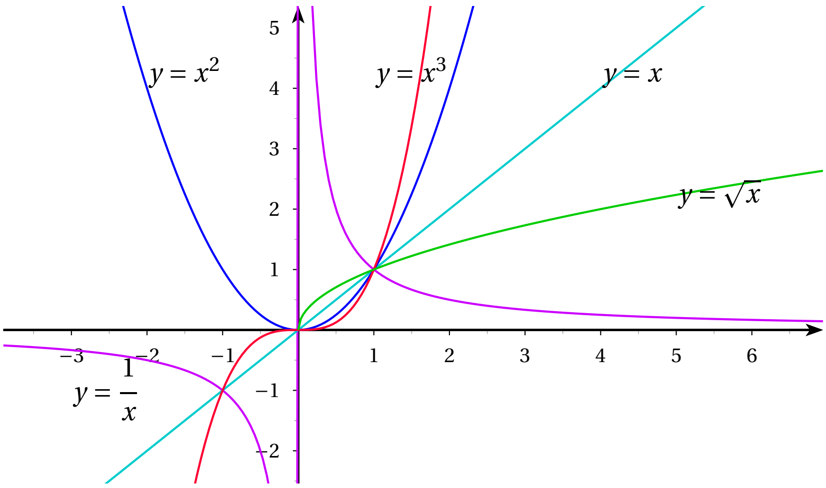
   c. $f : x \mapsto (x+2)^2$ et $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$

   or $f(-1) = 1$ et $f(1) = 9$.

   $f(-1) \neq f(1)$

   $f(-1) \neq -f(1)$ donc la fonction est ni paire, ni impaire.

2. On a :



3. (a) i. $f(x)=2|x+1|-1$

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x+1$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $\mid x+1\mid$ | | $-x-1$ | $0$ | $x+1$ | |
| $2\mid x+1\mid -1$ | | $-2x-3$ | $-1$ | $2x+1$ | |

ii. $f(x)=|x^2-2|+3x$

| $x$ | $-\infty$ | | $-\sqrt{2}$ | | $\sqrt{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2-2$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $\mid x^2-2\mid$ | | $x^2-2$ | $0$ | $-x^2+2$ | $0$ | $x^2-2$ | |
| $\mid x^2-2\mid +3x$ | | $x^2+3x-2$ | $-3\sqrt{2}$ | $-x^2+3x-2$ | $3\sqrt{2}$ | $x^2+3x-2$ | |

iii. $f(x)=\left|\dfrac{x+3}{x-1}\right|$

| $x$ | $-\infty$ | | $-3$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\dfrac{x+3}{x-1}$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $\Vert$ | $+$ | |
| $\left\lvert\dfrac{x+3}{x-1}\right\rvert$ | | $\dfrac{x+3}{x-1}$ | $0$ | $-\dfrac{x+3}{x-1}$ | $\Vert$ | $\dfrac{x+3}{x-1}$ | |

(b) Les représentations graphiques sont :